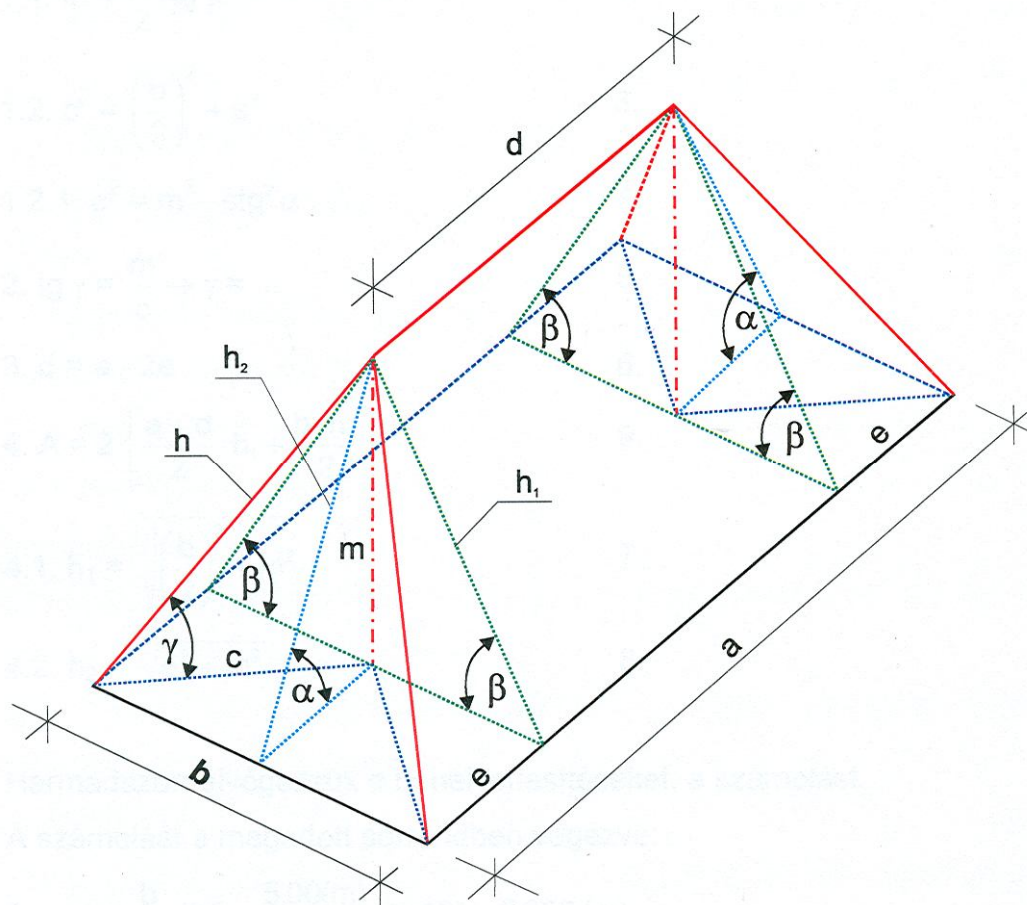


A szimmetrikus kontyvető adatai közötti összefüggésekről

Tekintsük az 1. ábra szerinti *szimmetrikus kontyvetőt* – ld. [1]!



1. ábra

Adott: $a, b; \alpha, \beta.$

Keresett: $m, e, c, h_1, h_2, h, \gamma, d; A$

Megoldás:

A β szöget tartalmazó derékszögű háromszögből:

$$\underline{\underline{m = \frac{b}{2} \cdot \operatorname{tg} \beta;}} \quad (1)$$

az α szöget tartalmazó derékszögű háromszögből:

$$e = \frac{m}{\operatorname{tg} \alpha}; \quad (2)$$

most (1) és (2) - vel:

$$\underline{\underline{e = \frac{b}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}.}} \quad (3)$$

Most Pitagorász tételével:

$$c = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + e^2}; \quad (4)$$

most (3) és (4) - gyel:

$$c = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2\right]} = \frac{b}{2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2},$$

tehát

$$c = \frac{b}{2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2}. \quad (5)$$

Megint a β szöget tartalmazó derékszögű háromszögből:

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + m^2}; \quad (6)$$

most (1) és (6) - tal:

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2} \cdot \operatorname{tg} \beta\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \beta} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot [1 + \operatorname{tg}^2 \beta]} = \frac{b}{2} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta},$$

tehát

$$h_1 = \frac{b}{2} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}. \quad (7/1)$$

Más alakban:

az $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{1}{\cos \beta}$ azonosságot felhasználva, (7) - ből:

$$h_1 = \frac{b}{2 \cdot \cos \beta}. \quad (7/2)$$

Most megint az α szöget tartalmazó derékszögű háromszögből:

$$h_2 = \sqrt{e^2 + m^2}; \quad (8)$$

most (2) és (8) - cal:

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{m}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2 + m^2} = \sqrt{m^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}\right)} = m \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}} = m \cdot \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{m}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

tehát

$$h_2 = \frac{m}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad (9)$$

ezután (1) és (9) - cel:

$$\underline{\underline{h_2 = \frac{b}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}}. \quad (10 / 1)$$

A képletekből, ill. az 1. ábrából leolvasható, hogy fennállnak az alábbiak is:

$$\underline{h_2 = \frac{m}{\sin \alpha}}; \quad (10 / 2)$$

$$\underline{h_2 = \frac{e}{\cos \alpha}}. \quad (10 / 3)$$

Ismét az 1. ábra alapján:

$$h = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + h_2^2}; \quad (11)$$

most (10 / 1) és (11) - gyel:

$$h = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \frac{b}{2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)},$$

tehát

$$\underline{\underline{h = \frac{b}{2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}}}. \quad (12)$$

Megint az 1. ábra szerint:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{m}{c}; \quad (13)$$

Most (1), (5) és (13) - mal:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\frac{b}{2} \cdot \operatorname{tg} \beta}{\frac{b}{2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2}} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2}},$$

tehát

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2}}; \quad (14)$$

(14) -ből:

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2}}. \quad (15)$$

Újra az 1. ábra szerint:

$$d = a - 2 \cdot e; \quad (16)$$

most (3) és (16) - tal:

$$d = a - 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = a - b \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha},$$

tehát

$$d = a - b \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (17)$$

A tető felszíne: két trapéz és két háromszög területének összege. Képlettel:

$$A = 2 \cdot \left(\frac{a + d}{2} \cdot h_1 + \frac{b \cdot h_2}{2} \right) = (a + d) \cdot h_1 + b \cdot h_2. \quad (18 / 1)$$

Most (17) és (18 / 1) - gyel:

$$A = \left(a + a - b \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \right) \cdot h_1 + b \cdot h_2 = \left(2 \cdot a - b \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \right) \cdot h_1 + b \cdot h_2; \quad (18 / 2)$$

majd (7 / 1), (10 / 1) és (18 / 2) - vel:

$$A = \left(2 \cdot a - b \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \right) \cdot \frac{b}{2} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} + b \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad (18 / 3)$$

rendezve (18 / 3) - at:

$$A = a \cdot b \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} + \frac{b^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \left(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} \right). \quad (18 / 4)$$

Ezzel feladatunkat megoldottuk.

Megjegyzések:

M1. A feladat megoldása során arra törekedtünk, hogy a keresett mennyiségek és az adott ($a, b; \alpha, \beta$) mennyiségek kapcsolata jól látható legyen.

M2. A képletek végső alakjának megadásakor szem előtt tartottuk, hogy ugyanazon szög különböző szögfüggvényei ne szerepeljenek a képletben, még ha az így bonyolultabbnak is tűnik. Főleg a $\operatorname{ctg} \alpha$ szögfüggvényt kerültük, ami nyomtatásban nem ritkán $c \cdot \operatorname{tg} \alpha$ - nak olvasható.

M3. Ajánljuk, hogy az Olvasó végezze el a $\beta = \alpha$ specializációt, ami az azonos hajlású szimmetrikus kontyvető esetének képleteire vezet!

M4. Ajánljuk, hogy az Olvasó lássa be az itteni és a *Néhány egyszerű tétel kontyvetőre* című korábbi dolgozatunkban kapott eredmények egyezését!

M5. A (14) képlet egy másik, érdekes alakba is írható; (14) - ből:

$$\operatorname{tg}^2 \gamma = \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \beta} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}},$$

ebből pedig

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \gamma},$$

másképpen:

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta = \operatorname{ctg}^2 \gamma. \quad (*)$$

Ez a képlet emlékeztet az $u^2 + v^2 = w^2$ alakú Pitagorász - tételre, ami segítheti (*) képlet megjegyzését.

Irodalom:

[1] – Galgóczi Gyula: Diplomamunka

Soproni Egyetem Tanárképző Intézet, okl. mérnöktanári szak
Sopron, 1999.

Összeállította: Galgóczi Gyula
mérnöktanár

Szödliget, 2008. november 16.